

Università di Milano Bicocca, 11 Maggio 2006

# CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ E CALCOLO DELLE SIZIGIE

**Alberto Damiano** - `damiano@karlin.mff.cuni.cz`

EČC (Eduard Čech Center) - Charles University, Prague

# OUTLINE

1. Esempi introduttivi
2. Sizigie e risoluzioni libere
3. Condizioni di compatibilità, singolarità eliminabili
4. Esempi di calcolo con CoCoA

# OUTLINE

⇒ **1.** ESEMPI INTRODUTTIVI

**2.** Sizigie e risoluzioni libere

**3.** Condizioni di compatibilità, singolarità eliminabili

**4.** Esempi di calcolo con CoCoA

**ESEMPIO 1**

## Equazioni di Maxwell nel vuoto

$\Omega \underset{\text{ap}}{\subseteq} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  con coordinate  $(\mathbf{x}, t) = (x, y, z, t)$

$\mathbf{E}, \mathbf{B} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , campo elettrico e magnetico

supponiamo che siano assegnate le densità  $\rho^e : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{J}^e : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} = \rho^e \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}^e \end{array} \right.$$

**DOMANDA:** quali condizioni dobbiamo imporre su  $\rho^e$  e  $\mathbf{J}^e$ ?

**ESEMPIO 1**

## Equazioni di Maxwell nel vuoto

$\Omega \underset{\text{ap}}{\subseteq} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  con coordinate  $(\mathbf{x}, t) = (x, y, z, t)$

$\mathbf{E}, \mathbf{B} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , campo elettrico e magnetico

supponiamo che siano assegnate le densità  $\rho^e : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{J}^e : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{l} \partial_t \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} = \rho^e \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}^e \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\partial_t \rho^e + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}^e = 0}$$

**DOMANDA:** quali proprietà di  $\nabla_{\mathbf{x}}$  e  $\partial_t$  abbiamo usato?

**ESEMPIO 2**funzioni olomorfe di  $n$  variabili complesse

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un aperto con coordinate  $z_k = x_k + \mathbf{i}y_k$ ,  $k = 1 \dots n$

$f, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ ,  $\partial_{\bar{z}_k} = \partial_{x_k} + \mathbf{i}\partial_{y_k}$  Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}_1} f & = & g_1 \\ & \dots & \\ \partial_{\bar{z}_n} f & = & g_n \end{cases}$$

**DOMANDA:** come posso leggere da questo sistema le proprietà delle funzioni olomorfe su  $\mathbb{C}^n$ ?

**ESEMPIO 2**funzioni olomorfe di  $n$  variabili complesse

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un aperto con coordinate  $z_k = x_k + \mathbf{i}y_k$ ,  $k = 1 \dots n$

$f, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ ,  $\partial_{\bar{z}_k} = \partial_{x_k} + \mathbf{i} \partial_{y_k}$  Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}_1} f & = & 0 \\ & \dots & \\ \partial_{\bar{z}_n} f & = & 0 \end{cases}$$

**RISPOSTA:** Il sistema omogeneo associato descrive le funzioni differenziabili su  $\mathbb{R}^{2n}$  che sono olomorfe su  $\mathbb{C}^n$

**ESEMPIO 2**funzioni olomorfe di  $n$  variabili complesseSia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un aperto con coordinate  $z_k = x_k + \mathbf{i}y_k$ ,  $k = 1 \dots n$  $f, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ,  $\partial_{\bar{z}_k} = \partial_{x_k} + \mathbf{i}\partial_{y_k}$  Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}_1} f & = & g_1 \\ & \dots & \\ \partial_{\bar{z}_n} f & = & g_n \end{cases}$$

**DOMANDE:** quali condizioni abbiamo su  $g_i$ ? Sono *sufficienti*?

**ESEMPIO 2**funzioni olomorfe di  $n$  variabili complesseSia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  un aperto con coordinate  $z_k = x_k + \mathbf{i}y_k$ ,  $k = 1 \dots n$  $f, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ,  $\partial_{\bar{z}_k} = \partial_{x_k} + \mathbf{i}\partial_{y_k}$  Cauchy-Riemann

$$\begin{array}{l} \partial_{\bar{z}_j} \\ \dots \\ -\partial_{\bar{z}_i} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \partial_{\bar{z}_i} f = g_i \\ \dots \\ \partial_{\bar{z}_j} f = g_j \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\partial_{\bar{z}_i} g_j - \partial_{\bar{z}_j} g_i = 0}$$

- Se l'aperto  $\Omega$  è semplicemente connesso tali condizioni sono sufficienti

**FATTO:**  $g = \sum_i g_i dz_i$  è **esatta** su  $\Omega$  sempl. conn.  $\Leftrightarrow g$  è **chiusa**.

## COMPLESSO DI KOSZUL

- Sto usando la commutatività degli operatori  $\longrightarrow$  lavoro nell'anello

$$\mathbb{C}[\partial_{\bar{z}_1}, \dots, \partial_{\bar{z}_n}] \simeq \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] =: R$$

- le condizioni di compatibilità del sistema precedente sono le prime sizigie dell'ideale  $I = (z_1, \dots, z_n)$

- Topologia di  $\mathbb{C}^n$ 

$\xleftrightarrow{\text{Stokes}}$	complesso de Rham
$\xleftrightarrow{?}$	complesso di Koszul ( <i>quasi</i> esatto):

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{P_{n-1}^T} R^n \xrightarrow{P_{n-2}^T} R^{\binom{n}{n-2}} \longrightarrow \dots \xrightarrow{P_2^T} R^{\binom{n}{2}} \xrightarrow{P_1^T} R^{n \binom{n}{z_1 \dots z_n}} \longrightarrow 0$$

- $P_i^T$  è la matrice le cui colonne sono le sizigie delle colonne di  $P_{i-1}^T$

## IN GENERALE

- supponiamo che gli operatori del sistema siano lineari a coefficienti costanti:

$$h_i(\partial_{\bar{z}_1}, \dots, \partial_{\bar{z}_n})f = g_i, \quad i = 1 \dots r \quad (\mathbf{I})$$

⇒ stiamo ancora lavorando in  $R = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] \ni h_i$

**D1:** le condizioni di compatibilità del sistema **(I)** sono ancora tutte e sole le prime sizigie dell'ideale  $I = (h_1, \dots, h_n)$  ?

**D2:** Chi è un analogo del complesso di de Rham?

**R (un pò imprecisa):** Sostituisco  $z_i \mapsto h_i$  nel complesso di Koszul.  
Ma ho ancora un complesso esatto?

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{P_{r-1}^T} R^r \xrightarrow{P_{r-2}^T} R^{\binom{r}{r-2}} \longrightarrow \dots \xrightarrow{P_2^T} R^{\binom{r}{2}} \xrightarrow{P_1^T} R^r \xrightarrow{(h_1 \dots h_r)} R \longrightarrow 0$$

# OUTLINE

1. Esempi introduttivi

⇒ **2. SIZIGIE E RISOLUZIONI LIBERE**

3. Condizioni di compatibilità, singolarità eliminabili

4. Esempi di calcolo con CoCoA

## SIZIGIE

## definizioni

\* Sia  $R := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  con la (su  $\mathbb{N}$ ) *graduazione* (su  $\mathbb{N}$ ) data da

$$R = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} R_d, \quad R_d \cdot R_e \subseteq (R_{d+e}), \quad \forall e, d \in \mathbb{Z}.$$

\* Sia  $M$  un  $R$ -sottomodulo di  $R^{r_0}$ . Siccome  $R$  è Noetheriano  $M$  è finitamente generato:  $M = \langle m_1, \dots, m_{r_1} \rangle$ .

\*  $M$  è graduato se  $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$  e  $R_e \cdot M_d \subseteq M_{d+e}$  per ogni  $d, e \in \mathbb{Z}$ .

Equivalentemente  $M$  è graduato se esiste un sistema di generatori omogenei.

\* Una  $r_1$ -upla di polinomi  $(p_1, \dots, p_{r_1}) \in R^{r_1}$  è una **sizigia** di  $M$  se

$$\boxed{p_1 m_1 + \dots + p_{r_1} m_{r_1} = 0}$$

\* Le sizigie formano un sottomodulo :  $Syz(M) = \langle s_1, \dots, s_{r_2} \rangle \subseteq R^{r_1}$

## RISOLUZIONI LIBERE

definizioni

\* Iterando la costruzione delle sizigie, posso costruire un complesso (quasi) esatto, detto **risoluzione libera** di  $M$  di lunghezza  $\ell$

$$0 \longrightarrow R^{r_\ell} \xrightarrow{P_{r_\ell-1}^T} R^{r_{\ell-1}} \xrightarrow{P_{r_\ell-2}^T} R^{r_{\ell-2}} \longrightarrow \dots \longrightarrow R^{r_2} \xrightarrow{P_1^T} R^{r_1} \xrightarrow{P_0^T} R^{r_0} \longrightarrow 0$$

dove  $\text{Im}(P_i^T) = \text{Syz}(\langle \text{colonne di } P_{i-1}^T \rangle)$  e  $M = \text{Im}(P_0^T)$ .

\* L'intero  $r_i$  si dice  $i$ -esimo **numero di Betti** della risoluzione

**TEO** di Hilbert: ogni modulo f.g. ha una risoluzione libera con  $\ell \leq n$

**D:** I numeri di Betti  $r_0 \dots r_\ell$  sono ben definiti?

## RISOLUZIONI LIBERE

caso graduato

\* Se il modulo da cui si parte è graduato (generatori omogenei), si può ottenere una risoluzione in cui le mappe sono tutte di grado zero

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} R_{(-j)}^{\beta_{j2}} \xrightarrow{P_1^T} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} R_{(-j)}^{\beta_{j1}} \xrightarrow{P_0^T} R^{r_0} \longrightarrow 0$$

dove lo **shift** di  $R$  è definito da  $R_{(-j)_d} = R_{d-j}$

\* I gradi dei generatori delle  $(k-1)$ -esime sizige sono gli interi  $j$  tali che  $\beta_{jk} \neq 0$

\* I  $\beta_{jk}$  sono detti **numeri di Betti graduati** e sono univocamente determinati da  $M$  se la risoluzione è *minimale*. Minimale in che senso?

## MINIMALITÀ

caso graduato

\* I vettori  $v_1, \dots, v_r \in R^s$  sono un sistema di generatori **irridondanti** per  $M$  se non esiste un sistema di generatori per  $M$  con meno di  $r$  elementi. Sono **minimali** se non ne posso rimuovere nemmeno uno.

\* Irridondanti  $\Rightarrow$  minimali e vale il viceversa nel caso graduato.

\* Una risoluzione libera graduata (RLG) è **minimale** se ad ogni passo scelgo sizie minimali. I numeri di Betti sono quindi ben definiti e due risoluzioni libere graduate minimali sono *isomorfe* come complessi.

\* Alternativamente, una RLG è minimale sse le uniche entrate costanti delle matrici  $P_i$  sono nulle.

\* Applicando il funtore controvariante  $\text{Hom}_R(-, R)$  a una risoluzione libera (minimale) di  $M$  otteniamo, a meno di un isomorfismo canonico

$$0 \longrightarrow R^{r_0} \xrightarrow{P_0} R^{r_1} \xrightarrow{P_1} R^{r_2} \longrightarrow \dots \longrightarrow R^{r_{\ell-2}} \xrightarrow{P_{\ell-2}} R^{r_{\ell-1}} \xrightarrow{P_{\ell-1}} R^{r_\ell} \longrightarrow 0$$

\* Le coomologie di questo complesso sono i moduli

$$\text{Ext}_R^j(M, R) = \frac{\text{Ker}(P_j)}{\text{Im}(P_{j-1})}, \quad i \in \mathbb{N}$$

\* Anche questi, come i numeri di Betti graduati, sono **invarianti** associati al modulo  $M$ . Se  $M$  è graduato sono graduati anche essi in modo canonico.

**D:** Quanto di tutto ciò si può calcolare con le Basi di Gröbner?

## BASI DI GRÖBNER

ordinamenti monomiali su  $R^s$

\* Dato un *ordinamento monomiale*  $\tau$  su  $R$ , ne costruisco in modo canonico *due* su  $R^s = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_s$  che siano **compatibili con  $\tau$**

$$\tau - \mathbf{pos} : x^\alpha e_i \succ x^\beta e_j \Leftrightarrow x^\alpha >_\tau x^\beta \quad \text{or} \quad (\alpha = \beta \text{ and } i < j)$$

$$\mathbf{pos} - \tau : x^\alpha e_i \succ x^\beta e_j \Leftrightarrow i < j \quad \text{or} \quad (i = j \text{ and } x^\alpha >_\tau x^\beta)$$

\* Una Base di Gröbner per  $M$  è un insieme di vettori  $v_1, \dots, v_t$  di  $R^s$  tale che  $\langle \text{LT}(M) \rangle = \langle \text{LT}(v_1), \dots, \text{LT}(v_t) \rangle$

\* Tutti gli algoritmi della teoria delle BDG, in particolare il calcolo delle sizigie, si **estendono naturalmente** ai moduli. Risoluzioni ed Ext si possono costruire grazie alla costruzione delle sizigie.

\* La graduazione "deve" essere **positiva**:  $R_d = (0)$  se  $d < 0$ .

# OUTLINE

1. Esempi introduttivi

2. Sizigie e risoluzioni libere

⇒ **3.** CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ, SINGOLARITÀ  
ELIMINABILI

4. Esempi di calcolo con CoCoA

## SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

★ Sia  $R := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $P$  una matrice  $r_1 \times r_0$  ad entrate in  $R$ ,  
 $D = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ ,  $\Omega \underset{\text{ap}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{r_0})$ .

Un sistema lineare a coefficienti costanti di equazioni differenziali alle derivate parziali è del tipo

$$\text{(I)} \quad P(D)f = 0, \quad \text{oppure} \quad \text{(II)} \quad P(D)f = g, \quad g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{r_1})$$

★ Le condizioni di compatibilità sono allora rappresentate da  $P_1$  t.c.  $P_1(D)g = 0$ . Affinché (II) abbia soluzione è necessario che  $P_1 \cdot P = 0$ .

★ Esempi tipici di spazi di funzioni in cui varrà la teoria che sto per presentare sono

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{A}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

★ L'oggetto algebrico associato al sistema **(II)** è il modulo f.g.

$$M := \text{Im}(P^T)$$

di cui possiamo calcolare una risoluzione libera. Se le equazioni del sistema sono omogenee, il modulo è graduato e calcoliamo una RLG minimale.

★ Ehrenpreis (1960) ha teorizzato una classe di fasci di funzioni su  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ , detti **di tipo LAU**, in cui vale l'analisi algebrica di un operatore lineare a coefficienti costanti.

**TEOREMA 1**

Ehrenpreis, Malgrange, Komatzu, Harvey

Sia  $\mathcal{S}$  un fascio di funzioni di tipo LAU,  $U$  un **aperto convesso** di  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ ,  $f \in \mathcal{S}^{r_0}$  e  $g \in \mathcal{S}^{r_1}$ . Sia  $M = \text{Im}(P^T)$  il modulo associato al sistema

$$P(D)f = g \quad (\mathbf{II})$$

e  $P_i^T$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , le matrici di una sua risoluzione libera. Allora il complesso

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(P(D))(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U)^{r_0} \xrightarrow{P(D)} \mathcal{S}(U)^{r_1} \xrightarrow{P_1(D)} \mathcal{S}(U)^{r_2} \longrightarrow \dots$$

è esatto.

★ In particolare, **(II)** ammette soluzione  $f$  se e solo se  $P_1(D)g = 0$ .

## FENOMENO DI HARTOGS

per funzioni olomorfe

★ Sia  $f$  una funzione olomorfa su un aperto di  $\mathbb{C}^n$  del tipo  $\Omega \setminus K$  dove  $\Omega$  è aperto e  $K$  è compatto. Supponiamo che  $n > 1$ . Allora esiste un'unica estensione olomorfa di  $f$  su tutto  $\Omega$ .

★ Il teorema era noto ad Hartogs dai primi del '900. Ha un equivalente (dovuto a Fueter) nel caso di funzioni  $\mathbb{H}^n$ -olomorfe, che sono il nucleo di un'estensione dell'operatore di Cauchy-Riemann ad  $\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{4n}$ .

★ Le dimostrazioni per  $\mathbb{C}^n$  e  $\mathbb{H}^n$  sono puramente analitiche, ma c'è un modo elegante e puramente algebrico di dimostrare questo fatto per classi più generali di funzioni che siano nel nucleo di un operatore lineare a coefficienti costanti.

## TEOREMA 2

Ehrenpreis 1961

Sia  $\mathcal{S} = \mathcal{D}'$  oppure  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $P(D)$  un operatore lineare a coefficienti costanti,  $M$  il modulo associato,  $K$  un **compatto convesso** in  $\mathbb{R}^n$ . Indichiamo con  $\mathcal{S}^P$  il nucleo di  $P(D)$  su  $\mathcal{S}$ . Allora per ogni  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Ext}_R^j(M, R) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_K^j(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}^P) = 0$$

★ In particolare soluzioni di  $P(D)f = 0$  su aperti del tipo  $U \setminus K$ , con  $K$  compatto convesso, possono essere estese a tutto  $U$  **sse**  $\text{Ext}^1(M, R) = 0$ , e tale estensione è unica sse  $\text{Ext}^0(M, R) = 0$ .

★ Il fenomeno di Hartogs può quindi essere verificato per le soluzioni di un sistema semplicemente utilizzando un **software di computer algebra** (Singular, CoCoA, Magma...) per verificare l'annullamento di alcuni moduli Ext.

# OUTLINE

1. Esempi introduttivi
2. Sizigie e risoluzioni libere
3. Condizioni di compatibilità, singolarità eliminabili
- ⇒ 4. ESEMPI DI CALCOLO CON CoCoA

## ESEMPIO 1

## Equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} \end{array} \right. = \begin{array}{l} \rho^e \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{J}^e \end{array}, \quad \begin{array}{l} f = (E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)^T \\ g = (\rho^e, 0, 0, 0, 0, J_x^e, J_y^e, J_z^e)^T \end{array}$$

e scriviamo l'operatore nella forma  $P(D)$  in modo che il sistema sia

$$P(D)f = g$$

$$P(D) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \hline 0 & \partial_z & -\partial_y & -\partial_t & 0 & 0 \\ -\partial_z & 0 & \partial_x & 0 & -\partial_t & 0 \\ \hline \partial_y & -\partial_x & 0 & 0 & 0 & -\partial_t \\ \hline -\partial_t & 0 & 0 & 0 & -\partial_z & \partial_y \\ 0 & -\partial_t & 0 & \partial_z & 0 & -\partial_x \\ 0 & 0 & -\partial_t & -\partial_y & \partial_x & 0 \end{array} \right]$$

$$P = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x & y & z \\ \hline 0 & z & -y & -t & 0 & 0 \\ -z & 0 & x & 0 & -t & 0 \\ y & -x & 0 & 0 & 0 & -t \\ \hline -t & 0 & 0 & 0 & -z & y \\ 0 & -t & 0 & z & 0 & -x \\ 0 & 0 & -t & -y & x & 0 \end{array} \right]$$

## REFERENZE

- CoCoA: a system for doing **C**omputations in **C**ommutative **A**lgebra  
→ freely available at `cocoa.dima.unige.it`
- F. Colombo, I. Sabadini, F. Sommen, D. C. Struppa, *Analysis of Dirac Systems and Computational Algebra*, Progress in Mathematical Physics, Birkhäuser Verlag, 2004.